ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι
#4 9-11-18 ΤΜΗΜΑ Ι

1. Να υπολογιστεί η ορίζουσα του παρακάτω πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

2. Αν x, a_1, a_2, a_3 είναι πραγματικοί αριθμοί, να υπολογιστεί η ορίζουσα του παρακάτω πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} x & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & x & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & x & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & x \end{pmatrix}.$$

3. Αν $A_n = \det \begin{pmatrix} 17 & 4 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 4 & 17 & 4 & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 4 & 17 & 4 & 0 & & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots & \vdots \\ 0 & & & & & & 4 \\ 0 & & & \cdots & 0 & 4 & 17 \end{pmatrix}$, να δείξετε τον αναγωγικό τύπο $A_n = 17A_{n-1} - 16A_{n-2}$ και ακολούθως να δείξετε ότι $A_n = 16^n + 16^{n-1} + \ldots + 16 + 1$.

4. Δείξτε ότι η ευθεία που διέρχεται απο τα σημεία (x_1, y_1), (x_2, y_2), δίνεται απο την εξίσωση:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

5. Δείξτε ότι το επίπεδο που διέρχεται απο τα μη συνευθειακά σημεία (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3), δίνεται απο την εξίσωση:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

6. Τα n σημεία του επιπέδου $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots, (x_n, y_n)$ βρίσκονται στην ίδια ευθεία αν και μόνο αν η βαθμίδα του πίνακα

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ x_n & y_n & 1 \end{pmatrix}$$

είναι μικρότερη του 3.

7. Να υπολογιστεί η ορίζουσα του $n \times n$ πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

8. Να βρεθούν τα $a, b \in \mathbb{R}$ ώστε το γραμμικό σύστημα

$$x - 4y + az = a + b$$

$$ax + y + z = 4$$

$$x - y + z = b$$

$i)$ να έχει μοναδική λύση, $ii)$ να μήν έχει λύση, $iii)$ να έχει άπειρες λύσεις.